Ganzzahlige Matrizen mit ganzzahligen Eigenwerten

Kowalsky, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 34, 1982, S.15-32

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Ganzzahlige Matrizen mit ganzzahligen Eigenwerten

Von **Hans-Joachim Kowalsky**, Braunschweig

(eingegangen am 20. 11. 1981)

Beim Aufsuchen von Beispielen zur Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren ist man häufig an ganzzahligen Matrizen mit ganzzahligen Eigenwerten interessiert. In diesem Zusammenhang stellt sich daher die Frage nach der Häufigkeit derartiger Matrizen und nach Verfahren zu ihrer Konstruktion. Hier soll allerdings zunächst nur der einfachste Fall, nämlich der von 2×2-Matrizen untersucht werden, der bereits einen guten Einblick in die Problemstellung vermittelt.

Zwei Wege bieten sich bei diesen Untersuchungen an: Einerseits kann man von ganzzahligen Eigenwerten und den zugehörigen Normalformen ausgehen und damit die Ähnlichkeitsklassen in den Vordergrund stellen. Oder man kann zweitens für ganzzahlige Matrizen Bedingungen aufstellen, die die Ganzzahligkeit der Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms sichern. Man gelangt so zu unterschiedlichen Darstellungsformen, die jeweils bestimmten Fragestellungen besser angepaßt sind.

Eine Sonderstellung nehmen die symmetrischen Matrizen ein, weil bei ihnen von vornherein die Realität der Eigenwerte gesichert ist und weil ihre Ähnlichkeitsklassen sämtlich durch Diagonalmatrizen repräsentiert werden. Nachfolgend soll daher auch zunächst dieser Spezialfall untersucht werden.

Generell sollen folgende Festsetzungen gelten:

Unter einer Matrix wird stets eine 2×2-Matrix verstanden. Sie heißt genau dann ganzzahlig, wenn ihre vier Elemente ganze Zahlen sind.

Zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen soll die Null nicht gehören.

Die Teilerfremdheit ganzer Zahlen a, b wird, wie üblich, durch $(a, b) = 1$ gekennzeichnet. Diese Schreibweise soll automatisch beinhalten, daß a und b nicht beide Null sind und daß im Fall $a = 0$ stets $b = \pm 1$, im Fall $b = 0$ entsprechend $a = \pm 1$ gilt.

§ 1 Ganzzahlige symmetrische Matrizen

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

eine ganzzahlige symmetrische Matrix mit ebenfalls ganzzahligen Eigenwerten λ und μ. Zusätzlich soll zunächst noch vorausgesetzt werden, daß kein doppelter Eigenwert vorliegt, so daß dann zur Bezeichnungsnormierung $\lambda > \mu$ vorausgesetzt werden kann. Als größerer der beiden Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$P(t) = t^2 - (a+c)t + ac - b^2$$

gilt für λ

$$\lambda = \frac{1}{2}\,(a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}) > a$$

und damit $a-\lambda \neq 0$. Daher erhält man die Koordination u,v eines zu λ gehörenden Eigenvektors als nichttriviale Lösung der Gleichung

$$(a-\lambda)u + bv = 0.$$

Wegen der Ganzzahligkeit der Koeffizienten können auch u und v ganzzahlig und sogar teilerfremd gewählt werden. Sie sind damit bis auf einen Vorzeichenfaktor eindeutig bestimmt. Fordert man nun noch

$$u \geqq 1 \quad \text{oder} \quad u=0, v=1,$$

so ist damit eindeutig eine Zuordnung

$$(1) \qquad A \mapsto (\lambda,\mu,u,v) \text{ mit } \lambda,\mu,u,v \in \mathbb{Z},\ \lambda>\mu,\ (u,v)=1,\ u \geqq 1 \text{ oder } u=0, v=1$$

auf der Menge der ganzzahligen symmetrischen Matrizen ohne doppelten Eigenwert definiert. Weiter ist jeweils

$$S = \frac{1}{w}\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad w = \sqrt{u^2+v^2}$$

eine eigentlich orthogonale Matrix, die A auf Diagonalform transformiert, so daß also

$$SAS^T = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = S^T \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} S$$

gilt. Die Zuordnung (1) ist daher injektiv. Hingewiesen sei noch darauf, daß zwar $w^2 \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist, w selbst aber im allgemeinen nicht einmal rational zu sein braucht.

Umgekehrt treten ganze Zahlen λ,μ,u,v mit den in (1) angegebenen Eigenschaften offenbar genau dann als Bild bei der Zuordnung auf, wenn

$$(2) \qquad \begin{aligned} A &= \frac{1}{w^2}\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} = \frac{1}{w^2}\begin{pmatrix} \lambda u^2+\mu v^2 & (\lambda-\mu)uv \\ (\lambda-\mu)uv & \mu u^2+\lambda v^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{w^2}\begin{pmatrix} \lambda w^2-(\lambda-\mu)v^2 & (\lambda-\mu)uv \\ (\lambda-\mu)uv & \lambda w^2-(\lambda-\mu)u^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine ganzzahlige Matrix ist, wenn also $w^2 = u^2+v^2$ ein Teiler von $(\lambda-\mu)u^2$, $(\lambda-\mu)v^2$ und $(\lambda-\mu)uv$ ist. Dies aber ist gleichwertig damit, daß w^2 sogar ein Teiler von $\lambda-\mu$ ist: Andernfalls würde nämlich ein Primteiler von w^2 existieren, der nicht $\lambda-\mu$ teilt und der daher ein Teiler von u und v sein müßte, was der vorausgesetzten Teilerfremdheit (auch im Fall $u=0$ oder $v=0$) widerspricht. Es folgt also

(3) $\lambda-\mu=\varkappa w^2=\varkappa(u^2+v^2)$ mit $\varkappa\in\mathbb{N}$,

weil wegen $\lambda-\mu\geqq 1$ und $u^2+v^2\geqq 1$ der andere Teiler $\varkappa$ sogar eine natürliche Zahl sein muß. Setzt man (3) in (2) ein, so ergibt sich zusammenfassend der folgende Satz.

1.1 Satz: *Eine ganzzahlige symmetrische Matrix* A *besitzt genau dann zwei verschiedene ganzzahlige Eigenwerte, wenn sie sich in der Form*

$$(4)\qquad A=\begin{pmatrix}\lambda-\varkappa v^2 & \varkappa uv\\ \varkappa uv & \lambda-\varkappa u^2\end{pmatrix}\quad\text{mit}\quad \begin{matrix}u,v,\lambda\in\mathbb{Z},\ \varkappa\in\mathbb{N},\ (u,v)=1,\\ u\geqq 1 \text{ oder } u=0, v=1\end{matrix}$$

darstellen läßt; und zwar ist diese Darstellung dann auch eindeutig. Ferner sind λ *und* $\mu=\lambda-\varkappa(u^2+v^2)$ *die beiden Eigenwerte von* A, *und die eigentlich orthogonale Matrix*

$$S=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\begin{pmatrix}u & v\\ -v & u\end{pmatrix}$$

transformiert A *auf Diagonalform.*

Selbstverständlich können in die Darstellung (4) nachträglich auch die symmetrischen Matrizen mit einem doppelten Eigenwert mit einbezogen werden: Es sind dies die durch $\varkappa=0$ gekennzeichneten Diagonalmatrizen. Nur gilt in diesem Fall nicht mehr die Eindeutigkeitsaussage.

Im Anschluß an die bisherigen Betrachtungen kann auch die Anzahl derjenigen ganzzahligen symmetrischen Matrizen bestimmt werden, die vorgegebene ganzzahlige Eigenwerte besitzen. Hierzu wird ein bekanntes Ergebnis über die Darstellbarkeit natürlicher Zahlen als Summe von zwei Quadraten gebraucht, das daher zunächst ohne Beweis angegeben wird (vgl. [2]).

1.2 Lemma: *Das Produkt*

$$a=2^{\alpha}p_1^{\beta_1}\dots p_r^{\beta_r}\quad(r,\beta_1,\dots\beta_r\in\mathbb{N})$$

aus Potenzen verschiedener Primzahlen besitzt genau dann eine „eigentliche Darstellung" $a=b^2+c^2$ *mit* $b,c\in\mathbb{N}$ *und* $(b,c)=1$, *wenn* $\alpha=0$ *oder* $\alpha=1$ *gilt und wenn* $p_\varrho\equiv 1$ (4) *für* $\varrho=1,\dots,r$ *erfüllt ist. Ist dies der Fall, so besitzt* a *genau* 2^{r-1} *verschiedene eigentliche Darstellungen. Im Sonderfall* $a=2$ *gibt es genau eine eigentliche Darstellung.*

Hingewiesen sei noch darauf, daß bei der Anzahlaussage die Darstellungen $a=b^2+c^2$ und $a=c^2+b^2$ nicht als verschieden angesehen werden.

1.3 Definition: *Für ganze Zahlen* λ,μ *mit* $\lambda\geqq\mu$ *sei* $N(\lambda,\mu)$ *die Anzahl der ganzzahligen symmetrischen Matrizen mit den Eigenwerten* λ *und* μ.

Da eine symmetrische Matrix mit doppeltem Eigenwert notwendig eine Diagonalmatrix ist, gilt $N(\lambda,\lambda)=1$. Man kann daher weiter $\lambda>\mu$ voraussetzen.

1.4 Satz: *Es seien λ und μ ganze Zahlen mit $\lambda>\mu$, deren Differenz die folgende Darstellung als Produkt von Potenzen verschiedener Primzahlen besitze:*

$$(5)\qquad \begin{aligned}&\lambda-\mu=2^k p_1^{m_1}\dots p_s^{m_s} q_1^{n_1}\dots q_t^{n_t} \quad \text{mit}\\ &k,s,t\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ m_1,\dots,m_s,n_1,\dots,n_t\in\mathbb{N},\\ &p_\sigma\equiv 1\,(4)\quad(\sigma=1,\dots,s),\ q_\tau\equiv 3\,(4)\quad(\tau=1,\dots,t).\end{aligned}$$

(Der Fall $\lambda-\mu=1$ wird durch $k=s=t=0$ erfaßt.) Dann gilt

$$N(\lambda,\mu)=\begin{cases}2k^* & \\ 2k^*(1+2m_1)\dots(1+2m_s)\end{cases} \text{für } \begin{matrix}s=0\\ s\geqq 1\end{matrix} \text{ mit}$$

$$k^*=\begin{cases}1 \\ 2\end{cases} \text{für } \begin{matrix}k=0\\ k\geqq 1.\end{matrix}$$

Beweis: Wegen 1.1 und (3) ist $N(\lambda,\mu)$ gerade die Anzahl der Tripel $(u,v,\varkappa)$ mit

$$u,v\in\mathbb{Z},\ (u,v)=1,\ u\geqq 1 \ \text{ oder }\ u=0,\quad v=1,\ \varkappa\in\mathbb{N},\ \lambda-\mu=\varkappa(u^2+v^2).$$

Die letzte Bedingung erfordert die Bestimmung aller Teiler a von $\lambda-\mu$, die eine Darstellung der Form $a=u^2+v^2$ besitzen. Zum Teiler $a=1$ gehören die beiden möglichen Fälle $u=1, v=0$ und $u=0, v=1$, die den zwei Diagonalmatrizen mit den Eigenwerten λ und μ entsprechen. Bei möglichen Teilern $a\geqq 2$ muß jedoch immer $u\geqq 1$ und $v\neq 0$ erfüllt sein.

Zunächst soll nun $k=0$, also $k^*=1$ vorausgesetzt werden. Gilt auch noch $s=0$, so besitzt $\lambda-\mu$ nach dem Lemma 1.2 keinen Teiler $a\geqq 2$, der sich als Summe von Quadraten zweier teilerfremder Zahlen darstellen läßt. Es gibt somit nur die beiden Diagonalmatrizen in Übereinstimmung mit der Behauptung $N(\lambda,\mu)=2k^*=2$.

Weiter kann also neben $k=0, k^*=1$ noch $s\geqq 1$ vorausgesetzt werden. Wegen 1.2 besitzen jetzt genau diejenigen Teiler $a\geqq 2$ von $\lambda-\mu$ eine eigentliche Darstellung als Summe von zwei Quadraten, die auch Teiler von

$$p=p_1^{m_1}\dots p_s^{m_s}$$

sind. Unter ihnen gibt es aber für $\sigma=1,\dots,s$ genau

$$e_\sigma=(m_1\dots m_\sigma)+\dots+(m_{s+1-\sigma}\dots m_s)$$

(σ-te elementarsymmetrische Funktion in $m_1,\dots,m_s$) Teiler mit σ beteiligten Primzahlen. Zu jedem dieser e_σ Teiler a gibt es nach dem Lemma $2^{\sigma-1}$ verschiedene eigentliche Darstellungen $a=b^2+c^2$, wobei $b\geqq 1$, $c\geqq 1$ und notwendig auch $b\neq c$ gilt, da a im Fall $b=c$ durch 2 teilbar sein müßte. Jeder Darstellung $a=b^2+c^2$ entsprechen aber schließlich vier verschiedene Darstellungen $a=u^2+v^2$, nämlich mit $u=b, v=\pm c$ und $u=c, v=\pm b$. Berücksichtigt man nun noch die zum Teiler 1 gehörenden beiden Diagonalmatrizen, so erhält man

$$\begin{aligned}N(\lambda,\mu)&=2+\sum_{\sigma=1}^{s}4\cdot 2^{\sigma-1}e_\sigma=2+2((1+2m_1)\dots(1+2m_s)-1)\\ &=2\cdot(1+2m_1)\dots(1+2m_s)\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der Behauptung ($k^*=1!$).

Schließlich sei $k \geqq 1$, also $k^*=2$. Bei der Zählung dürfen nach dem Lemma nur solche Teiler von $\lambda-\mu$ berücksichtigt werden, die nicht durch 2^2 teilbar sind. Im Fall $s=0$ sind dies die Teiler 1 und 2, die wegen $2=1^2+1^2=1^2+(-1)^2$ beide den Beitrag 2 liefern, so daß in Übereinstimmung mit der Behauptung $N(\lambda,\mu) = 2 + 2 = 2k^*$ ist. Im Fall $s \geqq 1$ hat man es erstens mit denselben Teilern a von p wie vorher zu tun und zweitens noch mit den entsprechenden Teilern 2a. Da aber nach dem Lemma zu a und 2a dieselbe Anzahl eigentlicher Darstellungen gehört, ist die entsprechende Summe aus dem ersten Beweisteil nur zu verdoppeln. Hinzu kommen bei der Zählung außer den beiden Diagonalmatrizen noch die beiden vom Teiler 2 herrührenden Möglichkeiten, so daß man insgesamt

$$N(\lambda,\mu) = 2+2+2\sum_{\sigma=1}^{s} 4\cdot 2^{\sigma-1}e_\sigma = 4(1+2m_1)\ldots(1+2m_s)$$

erhält, wegen $k^*=2$ also wieder die Behauptung. •

Speziell zeigt der soeben bewiesene Satz, daß zu gegebenen ganzzahligen Eigenwerten λ,μ innerhalb der ganzzahligen symmetrischen Matrizen unter Umständen nur die beiden entsprechenden Diagonalmatrizen existieren; nämlich dann, wenn $\lambda-\mu$ nur Primteiler besitzt, die kongruent 3 modulo 4 sind.

§ 2 Anzahlformel für symmetrische Matrizen

Um eine Aussage über die Häufigkeit ganzzahliger symmetrischer Matrizen mit ganzzahligen Eigenwerten zu gewinnen, soll die Anzahl derjenigen unter diesen Matrizen bestimmt werden, deren Elemente betragsmäßig durch eine vorgegebene Zahl beschränkt sind.

2.1 Definition: *Für jede natürliche Zahl* k *sei* S_k *die Menge aller ganzzahligen symmetrischen Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (a,b,c\in\mathbb{Z})$$

mit $|a|\leqq k$, $|b|\leqq k$, $|c|\leqq k$. *Ferner bedeute* S_k^* *die Teilmenge aller derjenigen Matrizen aus* S_k, *deren Eigenwerte ganzzahlig sind.*

$$s(k) := \text{Kard } S_k, \quad s^*(k) := \text{Kard } S_k^*.$$

Da offenbar

$$s(k) = (2k+1)^3$$

gilt, handelt es sich im folgenden um die Berechnung von $s^*(k)$. Dabei werden gewisse pythagoräische Zahlenpaare eine Rolle spielen, über deren wohlbekannte Darstellung zunächst ein Hilfssatz in der hier gebrauchten Form bewiesen werden soll.

2.2 Lemma: *Zu zwei natürlichen Zahlen* b,q *existiert genau dann eine natürliche Zahl* z *mit*

(6) $$q^2 + 4b^2 = z^2,$$

wenn es natürliche Zahlen α,β,γ *mit* $\beta>\gamma$ *so gibt, daß*

(7) $$q = \alpha(\beta^2-\gamma^2),\ b = \alpha\beta\gamma$$

gilt und α *keinen quadratischen Teiler* >1 *besitzt. In diesem Fall sind* α,β,γ *durch* b *und* q *eindeutig bestimmt.*

Beweis: Aus (7) folgt

$$q^2+4b^2 = \alpha^2(\beta^4-2\beta^2\gamma^2+\gamma^4) + 4\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \alpha^2(\beta^2+\gamma^2)^2,$$

so daß (6) mit $z=\alpha(\beta^2+\gamma^2)$ erfüllt ist. Dabei ist offenbar α der quadratfreie Anteil des größten gemeinsamen Teilers von b und q, während die Wurzel aus seinem quadratischen Anteil gerade der größte gemeinsame Teiler von β und γ ist. Daher sind α,β,γ auch durch b und q eindeutig bestimmt.

Umgekehrt sei jetzt (6) vorausgesetzt. Dann folgt

(8) $$4b^2 = z^2 - q^2 = (z+q)\,(z-q),$$

weswegen $z+q$ und $z-q$ gerade Zahlen sein müssen. Mit

$$z+q = 2u,\ z-q = 2v\ \ (u,v\in\mathbb{N})$$

erhält man aus (8)

(9) $$b^2 = uv,\ z = u+v,\ q = u-v \geqq 1,$$

woraus außerdem noch $u>v$ folgt. Weiter sei nun $(u,v) = \alpha\sigma^2$ die Zerlegung des größten gemeinsamen Teilers in den quadratfreien Anteil α und einen quadratischen Anteil. Wegen $uv = b^2$ müssen die weiteren Faktoren von u bzw. v quadratisch sein. Daher gilt

$$u = \alpha\sigma^2\mu^2 \text{ und } v = \alpha\sigma^2\nu^2 \text{ mit } (\mu,\nu) = 1.$$

Es folgt

$$b = \sqrt{uv} = \alpha\sigma^2\mu\nu \text{ und } q = u-v = \alpha\sigma^2(\mu^2-\nu^2).$$

Da wegen $(\mu,\nu)=1$ auch die Zahlen $\mu\nu$ und $\mu^2-\nu^2$ teilerfremd sind, besagen diese Gleichungen, daß α auch der quadratfreie Bestandteil von (b,q) ist. Die Gleichungen (7) ergeben sich nun unmittelbar mit $\beta=\sigma\mu$ und $\gamma=\sigma\nu$, wobei wegen $u>v$ auch $\beta>\gamma$ gilt. ●

Die Eigenwerte einer ganzzahligen symmetrischen Matrix

(10) $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

sind die Zahlen

$$\frac{1}{2}(a+c \pm \sqrt{(a-c)^2+4b^2}).$$

Da mit $a+b$ auch $a-b$ und weiter der Radikand gerade bzw. ungerade sind, hat man es genau dann mit ganzzahligen Eigenwerten zu tun, wenn es eine ganze Zahl z mit

$$(a-c)^2+4b^2=z^2$$

gibt. Setzt man hier zunächst $q=a-c \geqq 1$ und $b \geqq 1$ voraus, so liefert das soeben bewiesene Lemma unmittelbar:

Eine Matrix A *der Form* (10) *mit* $a-c \geqq 1$ *und* $b \geqq 1$ *besitzt genau dann ganzzahlige Eigenwerte, wenn*

$$(11) \qquad A=\begin{pmatrix} c+\alpha(\beta^2-\gamma^2) & \alpha\beta\gamma \\ \alpha\beta\gamma & c \end{pmatrix}$$

mit $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}$, $\beta>\gamma$ *gilt und dabei* α *quadratfrei ist.*

Der Zusammenhang mit der Darstellung (4) aus 1.1 ist offensichtlich. Lediglich die Nebenbedingungen sind etwas unterschiedlicher Natur. Insbesondere tritt an die Stelle der Teilerfremdheit hier die Quadratfreiheit.

Ein Vorzeichenwechsel bei $a-c$ oder auch bei b ändert nichts an der Ganzzahligkeit der Eigenwerte. Bei der Berechnung von $s^*(k)$ kann man sich daher auf Matrizen der Form (11) beschränken, wenn man ihre Anzahl entsprechend den möglichen Vorzeichenkombinationen nachträglich mit dem Faktor 4 versieht. Nicht erfaßt bleiben dann nur noch die Fälle, in denen $a-c=0$ oder $b=0$ gilt. Diese sollen nun zuerst berücksichtigt werden.

In S_k^* gibt es offenbar $(2k+1)^2$ Diagonalmatrizen und $2k(2k+1)$ Matrizen mit $a=c$ und $b \neq 0$. Berücksichtigt man noch die vorangehende Bemerkung, so erhält man

$$(12) \qquad s^*(k)=(2k+1)(4k+1)+4f(k),$$

wobei f(k) die Anzahl der Matrizen der Form (11) aus S_k^* ist. Diese Matrizen sind durch die Zahlen $c \in \mathbb{Z}$ und $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}$ mit $\beta>\gamma$ und quadratfreiem α gekennzeichnet, die jetzt aber noch wegen der Beschränkung der Matrizenelemente folgende Bedingungen erfüllen müssen:

$$1 \leqq \alpha\beta\gamma \leqq k, \ |c| \leqq k, \ |c+\alpha(\beta^2-\gamma^2)| \leqq k.$$

Bei Berücksichtigung von $\beta>\gamma$ können diese Ungleichungen auch gleichwertig durch folgende Forderungen ersetzt werden:

$$(13) \quad 1 \leqq \alpha \leqq k, \qquad (14) \quad 1 \leqq \gamma \leqq \frac{k}{\alpha}, \qquad (15) \quad \gamma+1 \leqq \beta \leqq \frac{k}{\alpha\gamma},$$

$$(16) \quad \gamma+1 \leqq \beta \leqq \sqrt{\frac{2k}{\alpha}+\gamma^2}, \qquad (17) \quad -k \leqq c \leqq k-\alpha(\beta^2-\gamma^2).$$

Aus (15) und (16) erhält man für γ neben (14) die Bedingungen

(18) $\gamma \leqq \sqrt{\frac{k}{\alpha}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$, (19) $\gamma \leqq \frac{k}{\alpha}-\frac{1}{2}$.

Wegen $\gamma \geqq 1$ folgt aus (18) noch $\alpha \leqq \frac{k}{2}$, also eine Verschärfung von (13). Und für derartige Werte von α ist (18) die schärfste der Forderungen (14), (18), (19). Da sich schließlich aus (17) für c jeweils $2k+1-\alpha(\beta^2-\gamma^2)$ Möglichkeiten ergeben, erhält man zusammenfassend

<u>2.3 Satz:</u>

$$s^*(k) = (2k+1)(4k+1) + 4 \cdot \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \text{quadratfrei}}}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} \sum_{\beta=\gamma+1}^{B} (2k+1-\alpha(\beta^2-\gamma^2))$$

mit $\Gamma = \left[\sqrt{\frac{k}{\alpha}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right]$ und $B = \min\left\{\left[\frac{k}{\alpha\gamma}\right], \left[\sqrt{\frac{2k}{\alpha}+\gamma^2}\right]\right\}$.

Dieser Ausdruck für $s^*(k)$ gestattet eine verhältnismäßig einfache Berechnung. Eine Tabelle für die ersten Werte ist am Ende dieses Paragraphen angefügt. Zunächst soll jedoch noch das asymptotische Verhalten dieser Funktion untersucht werden.

<u>2.4 Satz:</u> *Für* $k \to \infty$ *gilt*

$$s^*(k) = 0(k^2 \log k).$$

Beweis: In 2.3 hat man es bei der Bildung des Minimums B mit folgendem Sachverhalt zu tun: Es gilt

$$\frac{k}{\alpha\gamma} = \sqrt{\frac{2k}{\alpha}+\gamma^2} \quad \text{genau für} \quad \gamma_0 = \sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt{\frac{k}{\alpha}},$$

und es folgt

$$\min\left\{\left[\frac{k}{\alpha\gamma}\right], \left[\sqrt{\frac{2k}{\alpha}+\gamma^2}\right]\right\} \leqq \frac{k}{\alpha\gamma_0} < 2\sqrt{\frac{k}{\alpha}}.$$

Damit erhält man zunächst als grobe Abschätzung

$$f(k,\alpha,\gamma) = \sum_{\beta=\gamma+1}^{B} (2k+1-\alpha(\beta^2-\gamma^2)) \leqq \int_0^{\sqrt{\frac{k}{\alpha}}} (2k+1+\alpha\gamma^2)\, d\beta$$
$$= 2\sqrt{\frac{k}{\alpha}}\,(2k+1+\alpha\gamma^2).$$

Wegen

$$\sqrt{\frac{k}{\alpha}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2} \leqq \sqrt{\frac{k}{\alpha}}$$

folgt weiter

$$f(k,\alpha) = \sum_{\gamma=1}^{\Gamma} f(k,\alpha,\gamma) \leqq \int_1^{1+\sqrt{\frac{k}{\alpha}}} 2\sqrt{\frac{k}{\alpha}}\,(2k+1+\alpha\gamma^2)\, d\gamma$$
$$= 2\sqrt{\frac{k}{\alpha}}\left((2k+1)\sqrt{\frac{k}{\alpha}}+\frac{\alpha}{3}\left(\left(1+\sqrt{\frac{k}{\alpha}}\right)^3-1\right)\right) \leqq \frac{2}{\alpha}k(4k+1),$$

wobei im letzten Schritt $\alpha \leqq \frac{k}{2}$ benutzt wurde. Damit ergibt sich schließlich

$$f(k) = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \text{quadr.fr.}}}^{\left[\frac{k}{2}\right]} f(k,\alpha) \leqq 2k(4k+1) \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{\alpha} \leqq 2k(4k+1)\left(C + \log \frac{k}{2}\right),$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt. •

Daß es sich bei dem gerade Bewiesenen auch tatsächlich um die richtige Größenordnung handelt, zeigt eine ebenfalls recht grobe Abschätzung nach unten, die hier nur skizziert wird. Dabei sollen die Bezeichnungen aus 2.3 und dem letzten Beweis benutzt werden. Zunächst wird die Summation über γ durch

$$1 \leqq \gamma \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{\alpha}} = \gamma_1 < \sqrt{\sqrt{2}-1}\sqrt{\frac{k}{\alpha}} = \gamma_0$$

eingeschränkt. Bei der Bildung des Minimums B ist dann der zweite Term zuständig, so daß die Summation über β folgendermaßen verkürzt werden kann:

$$\gamma+1 \leqq \gamma_0+1 < \sqrt{\frac{k}{\alpha}} = \beta_0 \leqq \beta \leqq \sqrt{\frac{2k}{\alpha}} = \beta_1 < B.$$

Man erhält

$$f(k,\alpha,\gamma) \geqq \int_{\beta_0}^{\beta_1} (2k+1+\alpha\gamma^2-\alpha\beta^2)\, d\beta$$

$$= \sqrt{\frac{k}{\alpha}}\left((2k+1+\alpha\gamma^2)(\sqrt{2}-1) - \frac{\alpha}{3}\sqrt{\frac{k}{\alpha}}(2\sqrt{2}-1)\right)$$

und weiter

$$f(k,\alpha) \geqq \int_1^{\gamma_1} f(k,\alpha,\gamma)\, d\gamma.$$

Nach der Berechnung dieses Integrals kann man den Faktor $\frac{1}{\alpha}$ abspalten und in dem verbleibenden Ausdruck α durch 1 bzw. $\frac{k}{2}$ abschätzen. Es folgt dann

$$f(k,\alpha) \geqq \frac{1}{\alpha}(\varepsilon k^2 + o(k^2)),$$

wobei die Klammer nicht mehr von α abhängt und ε positiv ist. Wegen

$$f(k) = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \text{quadr.fr.}}}^{\left[\frac{k}{2}\right]} f(k,\alpha)$$

ist also nur noch

$$\sum_{\substack{\alpha=1 \\ \text{quadr.fr.}}}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{\alpha} = 0(\log k)$$

nachzuweisen. Dies ergibt sich aber wegen

$$\sum_{\substack{\alpha=1\\ \text{quadr.fr.}}}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{\alpha} \geqq \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{\alpha} - \sum_{\nu=2}^{\left[\sqrt{\frac{k}{2}}\right]} \frac{1}{\nu^2} \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{k}{2\nu^2}\right]} \frac{1}{\alpha}$$

durch eine einfache Abschätzung.

Zusammenfassend hat sich damit für $k \to \infty$

$$\frac{s^*(k)}{s(k)} = 0\left(\frac{\log k}{k}\right)$$

ergeben. In der nachstehenden Tabelle sind die ersten Werte für s(k) und s*(k) zusammengestellt.

k	s(k)	s*(k)	k	s(k)	s*(k)
1	27	15	11	12 167	1 515
2	125	53	12	15 625	1 953
3	343	107	13	19 683	2 279
4	729	193	14	24 389	2 653
5	1 331	295	15	29 791	3 083
6	2 197	461	16	35 937	3 521
7	3 375	611	17	42 875	3 951
8	4 913	809	18	50 653	4 533
9	6 859	1 015	19	59 319	5 019
10	9 261	1 261	20	68 921	5 697

§ 3 Beliebige ganzzahlige Matrizen

Läßt man die Voraussetzung der Symmetrie fallen und betrachtet beliebige ganzzahlige Matrizen mit ganzzahligen Eigenwerten, so lassen sich zwar analoge Überlegungen durchführen. Man gelangt aber nur zu schwächeren Aussagen, und die Verhältnisse werden auch komplizierter.

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{Z})$$

eine ganzzahlige Matrix mit ganzzahligen (also reellen) Eigenwerten λ und μ. Weiter soll zunächst vorausgesetzt werden, daß diese beiden Eigenwerte verschieden sind und daß ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\lambda > \mu$ gilt. Aus der Verschiedenheit der Eigenwerte folgt außerdem, daß A zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist, so daß also

(20) $$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ und } A = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} S$$

mit einer Transformationsmatrix

$$(21) \qquad S = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

gilt. Dabei sind u_1,v_1 die Koordinaten eines Eigenvektors zum Eigenwert λ und u_2,v_2 die Koordinaten eines Eigenvektors zum Eigenwert μ. Da λ,μ und die Elemente von A ganze Zahlen sind, können auch diese Koordinaten ganzzahlig und jeweils teilerfremd gewählt werden. Es kann also

$$(22) \qquad u_1,v_1,u_2,v_2 \in \mathbb{Z} \text{ und } (u_1,v_1) = (u_2,v_2) = 1$$

gefordert werden. Durch diese Bedingungen sind die Zahlen von S bis auf einen Vorzeichenfaktor eindeutig bestimmt. Fordert man weiter

$$(23) \qquad D = \operatorname{Det} S > 0,$$

so bedarf es nur noch der Festlegung des Vorzeichenfaktors bei der ersten Zeile, die durch

$$(24) \qquad \begin{matrix} u_1 > 0 \\ v_1 = 1 \end{matrix} \text{ für } \begin{matrix} u_1 \neq 0 \\ u_1 = 0 \end{matrix}$$

erfolgen soll. Damit ist wieder eine Zuordnung

$$A \longmapsto (S,\lambda,\mu)$$

definiert, die wegen (20) injektiv ist.

Umgekehrt seien nun ganze Zahlen λ,μ mit $\lambda > \mu$ und eine Matrix S der Form (21) mit den Eigenschaften (22)–(24) gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} A &= S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} S = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} v_2 & -v_1 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \lambda u_1 v_2 - \mu u_2 v_1 & (\lambda-\mu) v_1 v_2 \\ (\mu-\lambda) u_1 u_2 & \mu u_1 v_2 - \lambda u_2 v_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} (\lambda-\mu) u_1 v_2 + D\mu & (\lambda-\mu) v_1 v_2 \\ -(\lambda-\mu) u_1 u_2 & -(\lambda-\mu) u_2 v_1 + D\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

genau dann eine ganzzahlige Matrix, wenn D ein Teiler aller in den letzten Matrixklammern stehenden Zahlen ist. Gezeigt werden soll, daß D sogar ein Teiler von $\lambda-\mu$ sein muß.

Es sei nämlich p ein Primteiler von D, aber kein Teiler von $\lambda-\mu$. Dann muß p ein Teiler von u_1u_2, v_1v_2, u_1v_2 und u_2v_1 sein, wobei zunächst vorausgesetzt werden soll, daß diese Produkte alle von Null verschieden sind. Wegen $(u_1,v_1) = (u_2,v_2) = 1$ folgt aus $p|u_1$ und $p|v_1v_2$ jedenfalls $p|v_2$. Daher ist dann p weder ein Teiler von v_1 noch von u_2 im Widerspruch zu $p|u_2v_1$. Analog ergibt sich aus $p|u_2$ ein Widerspruch. Im Fall $u_1 = 0$ gilt $v_1 = 1$, und es folgt $p|v_2$ und $p|u_2$ im Widerspruch zu $(u_2,v_2) = 1$. Entsprechendes gilt in den Fällen $u_2 = 0$, $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$.

Damit ist $D|(\lambda-\mu)$ nachgewiesen, und wegen $D>0, \lambda>\mu$, also $D\geqq 1$ und $\lambda-\mu\geqq 1$ folgt

(26) $\lambda-\mu=\varkappa D$ mit $\varkappa\in\mathbb{N}$.

Setzt man dieses Resultat in (25) ein, so ergibt sich wegen der vorangehenden Überlegungen

<u>3.1 Satz:</u> *Eine ganzzahlige Matrix* A *besitzt genau dann zwei verschiedene ganzzahlige Eigenwerte, wenn sie sich in der Form*

$$A=\begin{pmatrix}\mu+\varkappa u_1v_2 & \varkappa v_1v_2\\ -\varkappa u_1u_2 & \mu-\varkappa u_2v_1\end{pmatrix}$$

mit ganzen Zahlen $u_1,v_1,u_2,v_2,\varkappa,\mu$ *darstellen läßt, die folgende Bedingungen erfüllen:*

$$(u_1,v_1)=(u_2,v_2)=1,\ u_1v_2-u_2v_1\geqq 1,\ u_1\geqq 1 \text{ oder } u_1=0, v_1=1, \varkappa\geqq 1.$$

Der eine Eigenwert von A *ist dann* μ, *der andere* $\lambda=\mu+\varkappa(u_1v_2-u_2v_1)$, *und*

$$S=\begin{pmatrix}u_1 & v_1\\ u_2 & v_2\end{pmatrix}$$

transformiert A *auf Diagonalform.*

Auch für die in diesem Satz ausgeschlossenen ganzzahligen Matrizen mit einem doppelten ganzzahligen Eigenwert läßt sich leicht eine Normaldarstellung angeben: Die Matrix A besitzt die Eigenwerte

$$\frac{1}{2}\,(a+d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}).$$

Das Auftreten eines doppelten Eigenwertes λ ist also gleichwertig mit

(27) $(a-d)^2+4bc=0$,

und es gilt dann

$$2\lambda=a+d.$$

Wegen (27) muß $a-d$ gerade sein, also die Form $a-d=2m$ mit $m\in\mathbb{Z}$ besitzen. Es folgt

(28) $m^2=-bc$,

weswegen $bc<0$ gilt. Außerdem müssen b und c denselben quadratfreien Anteil besitzen, damit $-bc$ ein Quadrat ist. Es gilt also weiter

$$b=\alpha\beta^2,\ c=-\alpha\gamma^2\quad(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}).$$

Aus (28) folgt jetzt

$$m=\alpha\beta\gamma,$$

wobei das Vorzeichen durch den Faktor β bestimmt und $\gamma\geqq 0$ gefordert werden kann. Wegen $a=\lambda+m$, $d=\lambda-m$ folgt jetzt

3.2 Satz: *Eine ganzzahlige Matrix* A *besitzt genau dann einen doppelten ganzzahligen Eigenwert* λ, *wenn sie sich in der Form*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda-\alpha\beta\gamma & \alpha\beta^2 \\ -\alpha\gamma^2 & \lambda-\alpha\beta\gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \alpha,\beta,\gamma,\lambda \in \mathbb{Z} \text{ und } \gamma \geqq 0$$

darstellen läßt.

Der Zusammenhang mit der Darstellung aus 3.1 ist offensichtlich; jedoch besitzen die auftretenden Parameter eine unterschiedliche Bedeutung.

Eine Übertragung von Satz 1.4 auf beliebige ganzzahlige Matrizen ist nicht möglich: Zu gegebenen ganzzahligen Eigenwerten λ,μ mit $\lambda>\mu$ gibt es stets unendlich viele ganzzahlige Matrizen A mit diesen Eigenwerten. Wegen 3.1 und (26)

$$\lambda-\mu = \varkappa D = \varkappa(u_1v_2-u_2v_1)$$

läuft nämlich die Bestimmung dieser Matrizen A darauf hinaus, Teiler τ von $\lambda-\mu$ in der Form

$$\tau = u_1v_2-u_2v_1 \quad \text{mit} \quad (u_1,v_1)=(u_2,v_2)=1 \quad \text{und} \quad u_1 \geqq 1 \quad \text{oder} \quad u_1=0, v_1=1$$

darzustellen. Dies ist aber z.B. schon für $\tau=1$ auf unendlich viele verschiedene Arten möglich. Entsprechendes gilt hinsichtlich doppelter Eigenwerte.

§ 4 Anzahlformel für beliebige ganzzahlige Matrizen

Wie im zweiten Paragraphen soll hier für beliebige ganzzahlige Matrizen mit beschränkten Elementen eine Anzahlfunktion für den Fall ganzzahliger Eigenwerte berechnet und ihr asymptotisches Verhalten untersucht werden.

4.1 Definition: *Für jede natürliche Zahl* k *sei* M_k *die Menge aller Matrizen*

$$(29) \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ (a,b,c,d \in \mathbb{Z})$$

mit $|a|,|b|,|c|,|d| \leqq k$. *Ferner sei* M_k^* *die Teilmenge derjenigen Matrizen aus* M_k, *die ganzzahlige Eigenwerte besitzen.*

$$m(k) := \text{Kard } M_k, \quad m^*(k) := \text{Kard } M_k^*.$$

Offenbar gilt

$$m(k) = (2k+1)^4,$$

so daß wieder nur $m^*(k)$ berechnet werden muß. Die Eigenwerte

$$\frac{1}{2}\left(a+d \pm \sqrt{(a-d)^2+4bc}\right)$$

der Matrix A aus (29) sind genau dann ganzzahlig, wenn

$$(a-d)^2+4bc=z^2$$

mit einer nicht negativen ganzen Zahl z gilt. Setzt man wieder $q=a-d$, so ist diese Bedingung gleichwertig mit

$$4bc=z^2-q^2=(z+q)(z-q).$$

Es folgt

$$z+q=2\alpha,\ z-q=2\beta,\ z=\alpha+\beta,\ q=\alpha-\beta$$

mit eindeutig bestimmten ganzen Zahlen α,β. Gleichwertig mit der Ganzzahligkeit der Eigenwerte ist daher die Existenz ganzer Zahlen α,β mit

$$(30)\qquad bc=\alpha\beta,\ q=\alpha-\beta,\ \alpha+\beta\geqq 0.$$

Damit allerdings die betreffende Matrix in M_k liegt, muß jedenfalls

$$|bc|\leqq k^2 \text{ und } |q|\leqq 2k$$

erfüllt sein. Zusammen mit (30) ergibt dies zunächst folgende Einschränkungen für α und β: Im Fall $\alpha\neq 0, \beta\neq 0$

$$(31)\qquad -k^2\leqq\alpha\leqq k^2,$$

$$(32)\qquad \max\left\{-\frac{k^2}{|\alpha|}, -\alpha,\ \alpha-2k\right\}\leqq\beta\leqq\min\left\{\frac{k^2}{|\alpha|}, \alpha+2k\right\}.$$

Gilt $\alpha=0$, so entfallen die Terme mit α im Nenner, was automatisch der Fall ist, wenn man sie durch $-\infty$ bzw. ∞ ersetzt. Im Fall $\beta=0$ ist die erste Bedingung wegen $\alpha=q$ durch

$$(31\,a)\qquad -2k\leqq\alpha\leqq 2k$$

zu ersetzen. Sieht man zunächst von diesem Sonderfall ab, gilt wegen $\alpha\leqq k^2$ stets $-\alpha\geqq -k^2/|\alpha|$, so daß in (32) bei der Maximumbildung der Term $-k^2/|\alpha|$ überflüssig ist. Damit weiter (32) überhaupt durch ein β erfüllbar ist, muß jedenfalls $-\alpha\leqq\alpha+2k$ und $\alpha-2k\leqq k^2/|\alpha|$ gelten. Aus der ersten Ungleichung folgt $\alpha\geqq -k$ als Verschärfung von (31). Die zweite Bedingung liefert $\alpha\leqq k(1+\sqrt{2})$, und dies ist für $k\geqq 3$ ebenfalls eine Verschärfung von (31). Im Fall $k=2$ erhält man wegen der Ganzzahligkeit von α Übereinstimmung mit (31). Schließlich liefert im Fall $k=1$ die neue Bedingung wieder wegen der Ganzzahligkeit über (31) hinaus nur die Möglichkeit $\alpha=2$, die wegen (32) aber $\beta=0$ zur Folge hat, so daß sich jetzt Übereinstimmung mit (31 a) ergibt. Zusammenfassend lauten somit die Bedingungen für α und β in allen Fällen

$$-k\leqq\alpha\leqq k(1+\sqrt{2}),\ \max\{-\alpha,\ \alpha-2k\}\leqq\beta\leqq\min\left\{\frac{k^2}{|\alpha|}, \alpha+2k\right\}.$$

Bei festem α und β gibt es wegen

$$a-d=q=\alpha-\beta,\ |a|\leqq k,\ |d|\leqq k$$

für die Wahl von a und d gerade $2k+1-|\alpha-\beta|$ Möglichkeiten. Die Möglichkeiten für die Wahl von b und c entsprechen wegen $bc=\alpha\beta$ im Fall $\alpha\beta\neq 0$ den Teilern b von $\alpha\beta$

mit $|b| \leqq k$ und $|\frac{\alpha\beta}{b}| \leqq k$, wobei positive und negative Teiler zu berücksichtigen sind oder aber ein Faktor 2. Im Fall $bc = \alpha\beta = 0$ ergeben sich unmittelbar $4k+1$ Möglichkeiten.

4.2 Definition: *Für* $k, n \in \mathbb{N}$ *sei*

$$T_k(n) := 2 \cdot (\text{Anzahl der Teiler } b \text{ von } n \text{ mit } 1 \leqq b \leqq k \text{ und } \tfrac{n}{b} \leqq k),$$
$$T_k(0) := 4k+1.$$

Mit Hilfe dieser Funktion T_k folgt jetzt aus den vorangehenden Überlegungen

4.3 Satz:
$$m^*(k) = \sum_{\alpha=-k}^{|k(1+\sqrt{2})|} \sum_{\beta=\beta_1}^{\beta_2} T_k(|\alpha\beta|)\,(2k+1-|\alpha-\beta|)$$
mit $\beta_1 = \max\{-\alpha, \alpha-2k\}$ *und* $\beta_2 = \min\{\frac{k^2}{|\alpha|}, \alpha+2k\}$.

Eine Tabelle der ersten Werte dieser Anzahlfunktion findet sich am Ende der Arbeit. Hier soll jetzt wieder ihr asymptotisches Verhalten untersucht werden. Da hierzu die Teilerfunktion T_k abgeschätzt werden muß, soll vorbereitend ein entsprechender Hilfssatz bewiesen werden.

4.4 Lemma: *Zu jeder natürlichen Zahl* r *gibt es eine Konstante* c_r mit

$$T_k(n) \leqq c_r \sqrt[r]{k}$$

für alle $k, n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Zuerst wird die Behauptung für den Spezialfall $k = n$ bewiesen, also für die Anzahl

$$\tau(n) = T_n(n)$$

aller Teiler von n.

Bei gegebenem r sei P die Menge aller Primzahlen, die kleiner als 2^r sind, und $s =$ Kard P sei die Anzahl dieser Primzahlen. Wegen $\sqrt[r]{2} > 1$ gibt es weiter eine natürliche Zahl m^* mit

$$1 + m \leqq (\sqrt[r]{2})^m \quad \text{für } m \geqq m^*.$$

Es sei dann

$$c_r^* := (1+m^*)^s.$$

Ist nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig mit der Primfaktorzerlegung

$$n = p_1^{m_1} \cdots p_t^{m_t} \cdot p_{t+1}^{m_{t+1}} \cdots p_q^{m_q},$$

so gilt

(33) $\quad \tau(n) = (1+m_1) \ldots (1+m_t)\,(1+m_{t+1}) \ldots (1+m_q).$

Die Bezeichnung sei dabei so gewählt, daß $p_1,\ldots,p_t \in P$, $p_{t+1},\ldots,p_q \notin P$ und damit $t \leqq s$ gilt. Für $\tau = 1,\ldots,t$ erhält man wegen

$$1+m_\tau \leqq \begin{cases} 1+m^* & \text{für } m_\tau < m^* \\ (\sqrt[r]{2})^{m_\tau} & \phantom{\text{für }} m_\tau \geqq m^* \end{cases}$$

jedenfalls

(34) $\quad 1+m_\tau \leqq (1+m^*)\sqrt[r]{2^{m_\tau}} \leqq (1+m^*)\sqrt[r]{p^{m_\tau}}.$

Für $\tau = t+1,\ldots,q$ ergibt sich wegen $2^r \leqq p_\tau$, also $2 \leqq \sqrt[r]{p_\tau}$,

(35) $\quad 1+m_\tau \leqq 2^{m_\tau} \leqq \sqrt[r]{p^{m_\tau}}.$

Einsetzen von (34) und (35) in (33) liefert wegen $t \leqq s$ die Behauptung

$$\tau(n) \leqq (1+m^*)^t \sqrt[r]{p_1^{m_1}\cdots p_t^{m_t}} \cdot \sqrt[r]{p_{t+1}^{m_{t+1}}\cdots p_q^{m_q}} \leqq c_\tau^* \sqrt[r]{n}.$$

Aus der Definition 4.2 folgt unmittelbar $T_k(n) = 0$ für $n > k^2$. Es kann also $n \leqq k^2$ vorausgesetzt werden. Dann aber gilt sicher $T_k(n) \leqq \tau(n)$ und daher weiter nach dem vorher Bewiesenen

$$T_k(n) \leqq \tau(n) \leqq c_{2r}^* \sqrt[2r]{n} \leqq c_{2r}^* \sqrt[2r]{k^2} = c_r \sqrt[r]{k}$$

mit $c_r = c_{2r}^*$. ●

<u>4.5 Satz:</u> *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *gilt*

$$m^*(k) = 0(k^{3+\varepsilon}).$$

Beweis: In der Summendarstellung 4.3 von $m^*(k)$ treten Summanden mit $\alpha = 0$ für $\beta = 0,\ldots,2k$ und Summanden mit $\beta = 0$ für $\alpha = 0,\ldots,2k$ auf. Es gibt also genau $4k+1$ Summanden mit $\alpha\beta = 0$ und daher mit $T_k(|\alpha\beta|) = 4k+1$. Schätzt man den anderen Faktor durch $2k+1$ nach oben ab, so liefern diese Summanden insgesamt einen Beitrag, der kleiner als $(4k+1)^2(2k+1)$ ist. In den übrigen Summanden kann $T_k(|\alpha\beta|)$ nach Lemma 4.4 durch $c_r\sqrt[r]{k}$ nach oben abgeschätzt werden, wobei $\frac{1}{r} < \varepsilon$ gewählt werden kann. Da die Anzahl dieser Summanden sicher kleiner als $12k^2$ ist, folgt

$$m^*(k) \leqq (2k+1)\,((4k+1)^2 + 12c_r k^{2+\varepsilon})$$

und damit die Behauptung. ●

Da die Paare (α,β) mit $0 \leqq \alpha \leqq k$ und $0 \leqq \beta \leqq k$ zum Summationsbereich gehören und dort $T_k(\alpha\beta) \geqq 1$, $2k+1-|\alpha-\beta| > k$ gilt, folgt jedenfalls $m^*(k) \geqq k^3$.

§ 5 Ganzzahlige Matrizen mit ganzzahligen komplexen Eigenwerten

Abschließend soll noch auf die Frage eingegangen werden, welche ganzzahligen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; (a,b,c,d \in \mathbb{Z})$$

Eigenwerte mit ganzzahligem Realteil und nicht verschwindendem ganzzahligen Imaginärteil besitzen. Da

$$\frac{1}{2}\left(a+d \pm \sqrt{(a-d)^2+4bc}\right)$$

die beiden Eigenwerte von A sind, folgt

$$a+d=2x \quad \text{und} \quad (a-d)^2+4bc=-4y^2,$$

wobei x der Realteil und $\pm y$ der Imaginärteil der Eigenwerte ist. Hiernach muß auch $a-d$ eine gerade Zahl sein. Mit einer ganzen Zahl q gilt also $a-d=2q$. Damit erhält man die folgende Parameterdarstellung der Matrizenelemente.

5.1 Satz: *Eine ganzzahlige Matrix* A *besitzt genau dann ganzzahlige komplexe Eigenwerte mit nicht verschwindendem Imaginärteil, wenn sich ihre Elemente* a,b,c,d *in der Form*

(36) $\quad a=x+q, \; d=x-q, \; bc=-(y^2+q^2)$ mit $q,x\in\mathbb{Z}$ und $y\in\mathbb{N}$

darstellen lassen. Es sind dann $x\pm iy$ *die beiden Eigenwerte von* A.

Wie im dritten Paragraphen zeigt auch dieser Satz, daß es zu jedem Paar konjugiert komplexer ganzer Zahlen unendlich viele Matrizen mit diesen Zahlen als Eigenwerten gibt. Außerdem gestattet er wieder, mit Hilfe der in 4.2 definierten Teilerfunktion eine Anzahlformel herzuleiten.

5.2 Definition: *Für jede natürliche Zahl* k *sei* M_k^{**} *die Menge derjenigen Matrizen aus* M_k, *die Eigenwerte mit ganzzahligem Realteil und nicht verschwindendem ganzzahligem Imaginärteil besitzen.*

$$m^{**}(k) := \text{Kard}\, M_k^{**}.$$

5.3 Satz: $$m^{**}(k) = \sum_{q=-[\sqrt{k^2-1}]}^{[\sqrt{k^2-1}]} \; \sum_{y=1}^{[\sqrt{k^2-q^2}]} T_k(q^2+y^2)\,(2k+1-2|q|).$$

Beweis: Für Matrizen $A\in M_k^{**}$ muß wegen (36)

$$y^2+q^2=|bc|\leqq k^2$$

erfüllt sein, woraus wegen $y\leqq 1$

$$|q|\leqq\sqrt{k^2-1} \quad \text{und} \quad 1\leqq y\leqq\sqrt{k^2-q^2}$$

folgt. Umgekehrt gibt es zu ganzen Zahlen q,y, die diese Bedingungen erfüllen, offenbar in (36) für die Wahl von b und c gerade $T_k(q^2+y^2)$ Möglichkeiten und für die Wahl von a und d genau $2k+1-2|q|$ Möglichkeiten. ●

Naheliegend wäre, statt der Teilerfunktion T_k Lemma 1.2 auf das Produkt der Primfaktorzerlegungen von b und c anzuwenden. Wegen der Unübersichtlichkeit der expliziten Darstellung als Summe von zwei Quadraten werden die Verhältnisse hierbei aber wesentlich ungünstiger. Aus dem letzten Satz folgt mit derselben Abschätzung wie im vorangehenden Paragraphen noch

5.4 Satz: $m^{**}(k) = 0(k^{3+\varepsilon})$ *für alle* $\varepsilon > 0$.

Ein Vergleich der Summationsbereiche in 4.3 und 5.3 läßt außerdem erwarten, daß $m^{**}(k)$ deutlich kleiner als $m^*(k)$ ausfällt. Dies bestätigt sich in der abschließenden Tabelle der Werte von $m(k)$, $m^*(k)$, $m^{**}(k)$ und $m^*(k) + m^{**}(k)$.

k	m(k)	m*(k)	m**(k)	m*(k)+m**(k)
1	81	55	6	61
2	625	317	44	361
3	2 401	963	82	1 045
4	6 561	2 301	204	2 505
5	14 641	4 315	634	4 949
6	28 561	7 793	888	8 681
7	50 625	12 047	1 110	13 157
8	83 521	18 449	1 728	20 177
9	130 321	26 527	2 510	29 037
10	194 481	37 325	4 268	41 593

Literatur

[1] KOWALSKY, H.-J.: Lineare Algebra, de Gruyter, Berlin–New York, 9. Auflage, 1979.
[2] SCHOLZ, A. und SCHOENEBERG, B.: Einführung in die Zahlentheorie, de Gruyter, Berlin–New York, 5. Auflage, 1973.